# LES FONCTEURS

IA COPILOT
PROPOS RECUEILLIS PAR THIERRY VEYT

## Les foncteurs

Aujourd'hui *2 février 2026* Vous avez dit Qu'est-ce qui a donné l'idée aux mathématiciens de généraliser la notion de fonction pour arriver à celle de foncteur qui établit une fonction entre des objets mathématiques (et pas uniquement des éléments d'un ensemble comme les nombres) tels que les morphismes ou les fonctions elle-mêmes? Copilote a dit

La naissance de la notion de foncteur n'est pas un simple caprice de généralisation. Elle répond à une série de besoins très concrets qui se sont imposés aux mathématiciens au tournant du XXeme siècle. L'idée n'est pas venue d'un seul coup, mais d'une accumulation de constats : les mathématiques manipulaient déjà des structures entières, pas seulement des éléments, et il fallait un langage pour parler de ces structures et de leurs relations.

Voici les motivations profondes qui ont conduit à cette généralisation.

### Les mathématiciens manipulaient déjà des structures, pas seulement des ensembles

Dès la fin du XIXeme siècle, on étudiait :
des groupes,
des espaces topologiques,
des anneaux,
des espaces vectoriels.

Et surtout, on étudiait les transformations entre ces structures : homomorphismes, applications continues, applications linéaires, etc.

On s'est vite rendu compte que ce qui comptait n'était pas seulement les objets, mais la manière dont ils se relient entre eux.

C'est exactement ce que la théorie des catégories formalise : un objet n'a de sens que par les morphismes qui le relient aux autres.

**Les constructions mathématiques étaient déjà "fonctorielles" avant qu'on invente le mot.** Bien avant 1945 (date de l'article fondateur d'Eilenberg et Mac Lane), les mathématiciens utilisaient des constructions qui, rétrospectivement, étaient des foncteurs :

L'application qui à un espace vectoriel associe son dual.
L'application qui à un groupe associe son groupe d'abélianisation.
L'application qui à un espace topologique associe son groupe fondamental.
L'application qui à un anneau associe son spectre.

Ces constructions avaient une propriété commune : elles envoyaient non seulement les objets vers des objets, mais aussi les morphismes vers des morphismes, en respectant la composition.

Il fallait un mot et un cadre pour décrire ce phénomène omniprésent.

---

*Date*: 7 février 2026.

**La montée de l'algèbre homologique a rendu indispensable une notion plus générale que "fonction".** Dans les années 1930–40, l'algèbre homologique et la topologie algébrique explosaient. On manipulait :

des groupes d'homologie $H_n(X)$,
des groupes de cohomologie $H^n(X)$,
des séquences exactes,
des transformations naturelles.

Ces constructions ne prenaient pas un élément en entrée, mais un objet mathématique entier, et elles produisaient une structure nouvelle, avec des règles de compatibilité très strictes.

Eilenberg et Mac Lane ont alors compris que :
L'homologie n'est pas une fonction, c'est un foncteur.
Et que les relations entre différentes théories d'homologie sont des transformations naturelles.
C'est ce besoin de formaliser les relations entre théories qui a cristallisé la notion de foncteur.

**Une fonction ne suffit pas pour capturer les relations structurelles.** Une fonction classique :

prend un élément,
renvoie un élément.

Mais en mathématiques modernes, on veut souvent :
prendre un objet structuré,
renvoyer un autre objet structuré,
et surtout préserver la structure des relations entre objets.
Une fonction ne peut pas faire cela. Un foncteur, si.
Un foncteur :
envoie les objets vers des objets,
envoie les morphismes vers des morphismes,
respecte la composition et les identités.
C'est exactement ce qu'il fallait pour décrire les mathématiques structurelles du XXeme siècle.

**La théorie des catégories est née comme un langage unificateur.** Les foncteurs ont été introduits pour unifier des domaines très différents :

topologie algébrique,
algèbre homologique,
théorie des groupes,
algèbre linéaire,
logique,
géométrie algébrique.

Le foncteur est devenu l'outil permettant de dire :
"Cette construction est la même dans tous ces contextes, même si les objets changent."
C'est un langage de haut niveau, comme passer de l'assembleur à un langage de programmation moderne.

**En résumé.** Les mathématiciens ont généralisé la notion de fonction vers celle de foncteur parce qu'ils avaient besoin de :

manipuler des structures entières plutôt que des éléments,
formaliser des constructions déjà existantes,
décrire des relations entre théories mathématiques,
unifier des domaines variés,
capturer la notion de "préservation de structure".

Le foncteur est né comme une réponse naturelle à ces besoins, pas comme une abstraction gratuite.

Si tu veux, je peux aussi retracer l'histoire précise de l'article fondateur d'Eilenberg–Mac Lane ou montrer comment une construction familière (comme le dual d'un espace vectoriel) devient un foncteur. Vous avez dit Oui. Copilote a dit

Parfait, allons au cœur de l'histoire et de l'idée mathématique. La naissance des foncteurs est l'un de ces moments où plusieurs courants convergent soudainement, et où un nouveau langage devient inévitable.

## Le contexte historique : Eilenberg et Mac Lane, 1945

La notion de foncteur apparaît formellement dans l'article fondateur :

Samuel Eilenberg et Saunders Mac Lane, "General Theory of Natural Equivalences", 1945.

Cet article ne cherche pas à créer une nouvelle théorie abstraite pour le plaisir. Il répond à un problème très concret : formaliser les méthodes de la topologie algébrique, en particulier l'homologie et la cohomologie.

Les topologues manipulaient déjà :

des espaces topologiques,

des applications continues,

des groupes d'homologie $H_n(X)$,

des morphismes induits $H_n(f)$ pour une application $f : X \to Y$.

Mais il n'existait aucun langage pour dire que :

« L'homologie est une construction qui associe à chaque espace un groupe, et à chaque application continue un morphisme de groupes, d'une manière compatible avec la composition. »

Eilenberg et Mac Lane ont compris que cette compatibilité était la clé. Ils ont donc inventé :

les catégories (objets + morphismes),

les foncteurs (constructions préservant la structure),

les transformations naturelles (relations entre foncteurs).

Ce n'était pas une abstraction gratuite : c'était une nécessité pour clarifier des phénomènes déjà omniprésents.

**Pourquoi une fonction ne suffisait plus.** Une fonction classique :

prend un élément,

renvoie un élément.

Mais les mathématiciens manipulaient déjà des constructions sur des objets entiers, par exemple :

le dual d'un espace vectoriel $V \to V^*$,

l'abélianisation d'un groupe $G \to \frac{G}{[G,G]}$,

le groupe fondamental $X \to \pi_1(X)$,

le groupe d'homologie $X \to H_n(X)$.

Ces constructions avaient toutes une propriété commune :

Elles envoient non seulement les objets vers des objets, mais aussi les morphismes vers des morphismes, en respectant la composition et les identités.

C'est exactement la définition d'un foncteur.

**Exemple concret : le dual d'un espace vectoriel est un foncteur.** Prenons une catégorie familière : les espaces vectoriels sur un corps k.

- Étape 1 : Sur les objets

  À chaque espace vectoriel V, on associe son dual $V^* = Hom(V, k)$.

- Étape 2 : Sur les morphismes
  À chaque application linéaire $f : V \to W$, on associe l'application linéaire duale : $f^* : W^* \to V^*, \phi \to \phi \circ f$.
- Étape 3 : Compatibilité
  On vérifie : $(id_V)^* = id_{V^*}$,
  $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.
  C'est exactement la condition pour être un foncteur contravariant.
  Les mathématiciens faisaient cela depuis longtemps, mais sans le nommer.

**Les foncteurs comme langage unificateur.** Une fois la notion introduite, elle a permis de :
unifier des constructions dans des domaines très différents,
comparer des théories (via les transformations naturelles),
définir des invariants (homologie, cohomologie, K-théorie, etc.),
formaliser des phénomènes structurels (adjoints, limites, colimites).
La théorie des catégories est devenue un langage transversal, comme une grammaire commune à toutes les branches des mathématiques modernes.

**En résumé.** Les mathématiciens ont été conduits à inventer les foncteurs parce que :
ils manipulaient déjà des constructions qui agissaient sur des objets et des morphismes,
ils avaient besoin d'un cadre pour l'homologie et la cohomologie,
ils voulaient un langage pour exprimer la compatibilité structurelle,
ils cherchaient à unifier des domaines entiers.
Le foncteur est né comme une réponse naturelle à ces besoins, pas comme une abstraction gratuite.
Si tu veux, je peux aussi illustrer comment une construction topologique (comme le groupe fondamental) devient un foncteur, ou expliquer comment les transformations naturelles ont été la vraie motivation derrière tout cela. Vous avez dit Oui. Explique-moi comment une construction topologique (ex. groupe fondamental) devient un foncteur. Copilote a dit
Très bien, allons voir pas à pas comment une construction topologique classique — le groupe fondamental — devient naturellement un foncteur. C'est un exemple parfait, parce qu'il montre pourquoi les mathématiciens ont eu besoin d'un langage plus riche que celui des simples fonctions.

## Le groupe fondamental : une construction sur les objets

On part d'un espace topologique X et d'un point base $x_0 \in X$. On définit : $\pi_1(X, x_0)$
comme l'ensemble des classes d'homotopie de lacets basés en $x_0$, muni de la composition des chemins. C'est un groupe.
Jusqu'ici, on a une application : $X \to \pi_1(X, x_0)$
mais ce n'est pas encore un foncteur, car un foncteur doit aussi agir sur les morphismes.

**Comment une application continue induit un morphisme de groupes.** Soit une application continue : $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$
avec $f(x_0) = y_0$.
On veut associer à f un morphisme de groupes : $f^* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$
Comment le définir ?

- Étape 1 : prendre un lacet dans X
  Un élément de $\pi_1(X, x_0)$ est une classe d'homotopie de lacets : $\gamma : [0, 1] \to X, \gamma(0) = \gamma(1) = x_0$.
- Étape 2 : appliquer f au lacet
  On obtient un lacet dans $\gamma$ : $f \circ \gamma : [0, 1] \to Y$.

- Étape 3 : passer à la classe d'homotopie
  On définit : $f^*([\gamma]) = [f \circ \gamma]$.
- Étape 4 : vérifier que c'est un morphisme de groupes
  On vérifie :
  $f^*([\gamma_1].[\gamma_2]) = f^*([\gamma_1]).f^*([\gamma_2])$,
  $f^*([e]) = [e]$ (le lacet constant).
  Donc $f^*$ est bien un homomorphisme de groupes.

**Compatibilité avec la composition : la clé du foncteur.** Pour que $\pi_1$ soit un foncteur, il faut que :
$(id_X)^* = id_{\pi_1(X)}$,
$(g \circ f)^* = g^* \circ f^*$.
Ces deux propriétés sont vraies :
appliquer l'identité à un lacet ne change rien,
appliquer $g \circ f$ à un lacet revient à appliquer f, puis g.
C'est exactement la condition de fonctorialité.

**Conclusion : $\pi_1$ est un foncteur.** On a donc une application : $\pi_1 : Top^* \to Grp$
où :
$Top^*$ est la catégorie des espaces pointés et applications continues préservant le point base,
Grp est la catégorie des groupes et homomorphismes.
Cette application :
envoie chaque espace pointé $(X, x_0)$ vers un groupe $\pi_1(X, x_0)$,
envoie chaque application continue f vers un morphisme de groupes $f^*$,
respecte la composition et les identités.
C'est donc un foncteur covariant.

**Pourquoi c'est important.** Ce n'est pas juste une jolie observation. La fonctorialité de $\pi_1$ permet :
de comparer les groupes fondamentaux de deux espaces via des applications continues,
de montrer que certaines constructions topologiques sont invariantes par homotopie,
de définir des invariants plus avancés (fibrations, revêtements, actions de groupes),
de relier la topologie à l'algèbre de manière systématique.
Sans la notion de foncteur, tout cela serait beaucoup plus difficile à exprimer proprement.
Si tu veux, je peux aussi te montrer comment l'homologie devient un foncteur, ou comment les transformations naturelles apparaissent quand on compare deux constructions comme $\pi_1$ et $H_1$. Vous avez dit Merci. Cela suffit pour aujourd'hui. Copilote a dit
Avec plaisir. Passe une excellente fin de journée — on reprendra quand tu voudras continuer cette exploration des idées mathématiques. Vous avez dit Ah si, j'oubliais une chose. Comment définit-on le foncteur d'oubli? Copilote a dit
Le foncteur d'oubli est l'un des exemples les plus simples et les plus utiles de foncteur. Il apparaît dès qu'on veut "regarder une structure mathématique en oubliant une partie de sa structure".
L'idée est très intuitive : on prend un objet riche (un groupe, un anneau, un espace vectoriel ...) et on le considère comme un objet plus pauvre (un ensemble, un groupe, un module ...), en laissant tomber certaines opérations.

## L'idée générale

Un foncteur d'oubli est un foncteur qui :

envoie un objet structuré vers le même objet, mais vu dans une catégorie avec moins de structure ;

envoie un morphisme vers lui-même, mais considéré dans la catégorie plus pauvre.

Autrement dit, il "oublie" une partie de la structure.

**Exemple classique : le foncteur d'oubli $U : Grp \to Set$.** Sur les objets

Un groupe $G = (|G|, \cdot)$ est envoyé vers son ensemble sous-jacent $|G|$ On oublie l'opération de groupe.

Sur les morphismes

Un homomorphisme de groupes $f : G \to H$ est envoyé vers la même fonction f: |G| → |H| mais vue comme simple application d'ensembles.

**Compatibilité.** $U(id_G) = id_{|}G|$,

$U(g \circ f) = U(g) \circ U(f)$.

Donc U est bien un foncteur.

**Autres exemples de foncteurs d'oubli.** Ils existent dans presque toutes les branches des mathématiques :

| Catégorie source | Catégorie cible | Structure oubliée |
|---|---|---|
| Vect | Grp | addition vectorielle conservée, on oublie la multiplication par les scalaires |
| Vect | Set | on oublie toute structure algébrique |
| Top | Set | on oublie la topologie |
| Ring | Ab | on oublie la multiplication |
| Field | Set | on oublie toutes les opérations |

Chaque fois, on garde l'objet "nu" et on jette une partie de la structure.

**Pourquoi les foncteurs d'oubli sont importants.** Ils jouent un rôle central dans :

la théorie des adjoints (beaucoup de foncteurs d'oubli ont des adjoints gauche ou droit),

la construction d'objets libres (ex. groupe libre sur un ensemble),

la compréhension des structures comme enrichissements successifs,

la logique catégorique (où "oublier" correspond à changer de niveau de structure).

Ils montrent aussi que la théorie des catégories n'est pas seulement une abstraction : elle formalise des gestes que les mathématiciens faisaient déjà intuitivement.

**Résumé.** Un foncteur d'oubli :

prend un objet structuré,

le considère dans une catégorie plus pauvre,

agit trivialement sur les morphismes,

respecte la composition,

et formalise l'idée d'"oublier une partie de la structure".

C'est l'un des foncteurs les plus simples, mais aussi l'un des plus fondamentaux.

Si tu veux, je peux aussi te montrer comment un foncteur d'oubli peut avoir un adjoint gauche (par exemple, l'ensemble → groupe libre) ou un adjoint droit, ce qui est une des idées les plus élégantes de la théorie des catégories. Oui.

## COMMENT UN FONCTEUR D'OUBLI PEUT AVOIR UN ADJOINT GAUCHE OU UN ADJOINT DROIT

Le foncteur d'oubli est déjà une belle idée en soi, mais ce qui le rend vraiment puissant, c'est qu'il possède souvent des foncteurs adjoints. Et c'est là que la magie catégorique opère : l'oubli n'est jamais gratuit, il appelle naturellement une construction qui "rajoute" exactement la structure oubliée, ni plus ni moins.

Voici comment tout cela s'articule.

**Le foncteur d'oubli : point de départ.** Prenons un exemple concret et fondamental : $U : Grp \to Set$

Ce foncteur :

envoie un groupe G vers son ensemble sous-jacent |G|.

envoie un morphisme de groupes vers la même fonction d'ensembles.

Il "oublie" l'opération de groupe.

Mais ce geste soulève immédiatement une question profonde :

Si j'ai un ensemble X, quel est le meilleur groupe dont l'ensemble sous-jacent est X ou est construit à partir de X?

La théorie des catégories répond : ce "meilleur" groupe est le groupe libre sur X.

**L'adjoint gauche du foncteur d'oubli : ajouter la structure libre.** Le foncteur d'oubli $U : Grp \to Set$ possède un adjoint gauche. $F : Set \to Grp$

où F(X) est le groupe libre engendré par l'ensemble X. Pourquoi "libre" ?

Parce que c'est le groupe qui :

contient X,

n'impose aucune relation autre que celles nécessaires pour être un groupe,

est universel pour les applications de X vers un groupe.

Formellement, on a une bijection naturelle :

Hom Grp ( F ( X ), G ) ≅ Hom Set ( X, U ( G ) ).

Cette équivalence exprime exactement l'adjonction.

**L'adjoint droit : quand "oublier" laisse une trace.** Certains foncteurs d'oubli ont aussi un adjoint droit.

Par exemple : $U : Top \to Set$

a un adjoint droit : $D : Set \to Top$

où D(X) est l'ensemble X muni de la topologie discrète.

Pourquoi la topologie discrète ?

Parce qu'elle est la topologie la plus fine qui rend toute fonction f:Y→X continue. C'est exactement ce qu'exprime l'adjonction :

Hom Top ( Y, D ( X ) ) ≅ Hom Set ( U ( Y ), X ).

**Le schéma général.** Pour un foncteur d'oubli : $U : C \to D$,

les adjoints expriment deux manières opposées de "rajouter la structure oubliée" : Adjoint gauche F : structure libre

On ajoute la structure minimale pour obtenir un objet de C.

Exemples :

ensemble -> groupe libre,

ensemble -> espace vectoriel libre,

ensemble -> monoïde libre.

Adjoint droit R : structure co-discrète

On ajoute la structure maximale compatible avec les morphismes.

Exemples :

ensemble -> topologie discrète,

ensemble -> ordre discret,

ensemble -> espace uniforme discret.

**Pourquoi c'est si élégant.** Les foncteurs d'oubli montrent que :

les structures mathématiques ne sont pas isolées,

elles s'organisent en couches,

et chaque couche peut être retirée ou reconstruite de manière universelle.

L'adjonction formalise exactement ce que signifie :
"Construire l'objet le plus libre" ou "Construire l'objet le plus rigide".
C'est l'un des points où la théorie des catégories révèle sa puissance conceptuelle.
Si tu veux, je peux illustrer tout cela avec un exemple très concret : comment construire explicitement le groupe libre sur un ensemble, ou comment la topologie discrète apparaît comme adjoint droit. Oui. Le groupe libre sur un ensemble.
Le groupe libre sur un ensemble est l'un des exemples les plus élégants où l'on voit une idée intuitive — "ajouter une structure de groupe sans imposer de relations inutiles" — devenir une construction mathématique précise et universelle.
Voici une explication claire, complète et progressive.

**L'idée intuitive.** On part d'un ensemble X. On veut construire un groupe F(X) qui :
contient X d'une manière reconnaissable,
n'impose aucune relation entre les éléments de X sauf celles obligatoires pour être un groupe,
est universel pour les applications de X vers un groupe.
Autrement dit :
Le groupe libre sur X est le groupe "le plus libre" engendré par X.

**Construction concrète : les mots réduits.** C'est la construction la plus intuitive.

- Étape 1 : créer un alphabet
  On prend :
  les symboles de X,
  leurs inverses formels $x^{-1}$ pour chaque $x \in X$.
- Étape 2 : former des mots
  Un élément de F(X) est un mot fini : $x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} ... x_{i_n}^{\epsilon_n}$
  où chaque $\epsilon_k$ vaut +1 ou -1.
- Étape 3 : réduire les mots On impose la règle :
  on supprime toute occurrence de $xx^{-1}$ ou $x^{-1}x$.
  Un mot est réduit s'il ne contient plus de telles paires adjacentes.
- Étape 4 : définir l'opération de groupe
  La multiplication est :
  la concaténation des mots,
  suivie d'une réduction.
  L'élément neutre est le mot vide.
  L'inverse d'un mot est le mot écrit à l'envers en inversant chaque exposant.

**Propriété universelle : le cœur de la construction.** Le groupe libre n'est pas seulement une construction explicite. Il est caractérisé par une propriété universelle :
Pour tout groupe G et toute fonction $f : X \to U(G)$ (où U est le foncteur d'oubli), il existe un unique homomorphisme de groupes : $f : F(X) \to G$
tel que : f (x)=f(x)pour tout $x \in X$.
Cette propriété dit que :
F(X) est le groupe "libre" engendré par X, et toute fonction de X vers un groupe se prolonge de manière unique en morphisme de groupes.
C'est exactement ce qui fait de F l'adjoint gauche du foncteur d'oubli.

**Le lien avec le foncteur d'oubli.** On a une adjonction : $F \dashv U$
où :
U:Grp $\to$ Set oublie la structure de groupe,
F:Set $\to$ Grp construit le groupe libre.
L'adjonction s'exprime par une bijection naturelle : Hom Grp(F(X),G)$\cong$Hom Set(X,U(G)).

Cette équivalence est le cœur conceptuel de la construction.

**Exemples simples.**

- Exemple 1 : X=a
  Le groupe libre sur un seul générateur est : F(a)≅Z.
  Le mot $a^n$ correspond à l'entier n.
- Exemple 2 : X={a,b}
  Le groupe libre sur deux générateurs est le groupe des mots réduits en $a, a^{-1}, b, b^{-1}$.
  C'est un groupe non commutatif très riche.
- Exemple 3 : $X = \phi$
  Le groupe libre sur l'ensemble vide est le groupe trivial.

**Pourquoi cette construction est si importante.** Le groupe libre est fondamental en :
topologie algébrique (groupes fondamentaux de graphes),
théorie des groupes (présentations, relations),
algèbre combinatoire,
théorie des catégories (adjoints, foncteurs libres),
informatique théorique (mots, automates).
Il montre comment une structure peut être ajoutée de manière universelle, ce qui est l'une des idées centrales de la théorie des catégories.

Si tu veux, je peux aussi t'expliquer comment les présentations de groupes (générateurs + relations) s'obtiennent en partant du groupe libre, ou comment cette construction se généralise aux monoïdes libres et aux algèbres libres. Oui. Comment les présentations de groupes s'obtiennent en partant du groupe libre.

Les présentations de groupes sont une manière extraordinairement compacte de décrire un groupe en termes de générateurs et de relations. Et la clé pour comprendre d'où elles viennent, c'est précisément le groupe libre.

Tu vas voir : tout se construit naturellement à partir de l'idée que le groupe libre est "le groupe sans relations". Les présentations apparaissent dès qu'on décide d'ajouter des relations.

**Point de départ : le groupe libre F(X).** On part d'un ensemble X. Le groupe libre F(X) est le groupe :
engendré par X,
sans aucune relation autre que celles imposées par les axiomes de groupe.
Il contient donc tous les mots réduits en les symboles de X et leurs inverses.

**Ajouter des relations : quotienter le groupe libre.** Supposons maintenant qu'on veuille imposer certaines relations, par exemple :
$aba^{-1}b^{-1} = e$,
$a^3 = e$,
$b^2 = e$,
etc.
Chaque relation est une équation entre mots du groupe libre.
Pour imposer ces relations, on procède ainsi :
On prend le sous-groupe normal N de F(X) engendré par tous les mots qu'on veut rendre égaux à l'identité.
On forme le quotient :
$G = \frac{F(X)}{N}$.
Ce groupe G est alors le groupe engendré par X avec exactement les relations qu'on a imposées.

**Définition formelle : présentation par générateurs et relations.** On écrit : G=⟨X|R⟩
où :
X est l'ensemble des générateurs,
R est l'ensemble des relations (mots du groupe libre qu'on déclare égaux à l'identité).
Formellement : $< X|R >= \frac{F(X)}{<R>}$
où $< R >$ désigne le sous-groupe normal engendré par R.

**Pourquoi cette construction est naturelle.** Parce que le groupe libre F(X) a la propriété universelle suivante :
Tout groupe engendré par une application X→G est un quotient de F(X).
Donc, si on veut un groupe engendré par X et satisfaisant certaines relations R, il suffit de quotienter par le plus petit sous-groupe normal qui force ces relations.
C'est exactement ce que fait la présentation.

**Exemples concrets.**

- Exemple 1 : le groupe cyclique d'ordre n $C_n = <a|a^n = e>$.
  On part du groupe libre F(a)≅ $\mathbb{Z}$, puis on impose la relation $a^n = e$. On obtient $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$.
- Exemple 2 : le groupe diédral $D_n = <r, s|r^n = e, s^2 = e, srs = r^{-1}$ [1]. On part du groupe libre sur r,s, puis on impose les relations de symétrie.
- Exemple 3 : le groupe fondamental d'un graphe
  Si un graphe a k cycles indépendants, son groupe fondamental est : $\pi_1(graphe) = <a_1, \ldots, a_k|>$
  c'est-à-dire un groupe libre de rang k. Aucune relation n'est imposée.

**Résumé clair.** Les présentations de groupes s'obtiennent ainsi :
Choisir des générateurs X.
Construire le groupe libre F(X).
Imposer des relations R en quotientant par le sous-groupe normal qu'elles engendrent.
Le groupe obtenu est :
$<X|R>$.
C'est la manière la plus compacte et la plus conceptuelle de décrire un groupe.
Si tu veux, je peux te montrer comment cette construction s'applique à un groupe particulier qui t'intéresse, ou comment lire une présentation pour comprendre la structure du groupe qu'elle décrit. Cela suffit pour aujourd'hui.
Très bien, on s'arrête là pour aujourd'hui. Ravi d'avoir exploré tout ce chemin avec toi — des foncteurs jusqu'aux présentations de groupes, c'est un beau parcours conceptuel.
Quand tu voudras reprendre, je serai là pour continuer à dérouler le fil des idées mathématiques.
*Email address*: thierryveyt@gmail.com

[1] On trouve généralement comme définition dans la littérature mathématique l expression $srs^{-1} = r^{-1}$ or ces expressions sont identiques car $s = s^{-1}$ étant donné que $s^2 = e$